**حساب تحويل لابلاس التحليلي بطريقة التحويل التفاضلي**

1- ابتسام مصطفي ساسي افتوحه 2- عتيقة ميلاد محمود الزوام

**‏**

**الملخص**

في هذا العمل، تم استخدام طريقة حديثة نسبيًا، يتم تطبيقها لتحديد تحويلات لابلاس مبنية على طريقة التحويل التفاضلي، على عكس الطريقة المعتادة دون الحاجة إلى عمل حسابي كبير الذي يتطلب ذلك التكامل، وميزة هذه الطريقة هي إجراء بسيط وعدد قليل من العمليات الأولية. ونلاحظ فعالية ودقة وذات كفاءة حسابية قوية من خلال الأمثلة.

1**. المقدمة**

تميزت طريقة تحويل لابلاس بالكثير من النجاح في مجال العلوم والهندسة منذ 1910 [11-1] .حيث أن العديد من التخصصات في مجال العلوم والهندسة على وجه الخصوص يستخدمون تحويل لابلاس بصورة أساسية في العديد من التطبيقات. كما قدمت في بحث مزدوج من قبل ديكن، و بابويان، وآخرون[14-12]. لقد وضع إجراء جيد للحصول على تحويلات لابلاس التحليلية من خلال طريقة التحليل لأدوميان[13], [15], [16],للحصول على تحويل لابلاس كما تمكن عباس بندي من استخدام طريقة الاضطراب المتماثل لهوموتوبي لإيجاد تحويلات لابلاس. [10] في الآونة الأخيرة تم تركيز إلى حد ما على تقنية قوية، وهي طريقة التحويل التفاضلي(DTM) ، لمعالجة المعادلات الوظيفية. وهو اقتراح مفهوم لـ DTM ولأول مرة من قبلزو وفي دراسته عن الدوائر الكهربائية والمعادلات الناشئة [17]، لحل مجموعة واسعة من المعادلات الجبرية والتفاضلية والتكاملية. وباختصار، فإن طريقة [14-15] DTMتعتمد على حلول سلسلة تايلور وتطبيقاتها العديدة [10-11]وتهدف هذا البحث إلى تقديم مخطط بسيط خالٍ من التكامل لإيجاد تحويل لابلاس كما هو معروف، فإن الروتين القياسي لاشتقاق تحويل لابلاس ينتج تكامل قد يكون في بعض الحالات غير قابل للتحليل. ومع ذلك، على النقيض من ذلك، لا يتطلب النهج المباشر المقترح سوى عمليات تفاضل وتحاليل سهلة. تم توضيح موثوقية وكفاءة الطريقة الجديدة بشكل جيد من خلال عدد من الأمثلة.

1. **بعض عمليات التحويل التفاضلي :**

|  |  |
| --- | --- |
| **المعادلة الأصلية** | **المعادلة بعد التحويلات** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

جدول (1)

1. **تعريفات وعمليات طريقة التحويل التفاضلي**

لراحة القارئ، نراجع بإيجاز بعض أساسيات التحويل التفاضلي الأحادي البعد وفقًا لذلك يتم تعريف التحويل التفاضلي للدالة (u(x

بالصيغة التالية :

(1)

حيث و هما الدالتان الأصليتان والمحولتان، على التوالي. وفقًا لذلك، يتم تحديد التحويل التفاضلي العكسي لـ على النحو التالي:

(2)

المعادلة (2) تدل على البساطة الكبيرة في حساب التحويل العكسي التفاضلي. هذه هو عكس حالة الانعكاس التحليلي لتحويلات لابلاس. من أجل الإيجاز، نحن لا ندرج التعريفات / النظريات المتعلقة بالتحويلات التفاضلية ذات الأبعاد nوتوصي القارئ المهتم بذلك يرى المرجع [9]. بعض العمليات الأساسية للتحويل التفاضلي أحادي البعد مذكورة في الجدول 1. براهينهم سهلة متبوعة بالتعريفات (1)، (2) وهي مغطاة بالكامل في المرجع [7-8].

ملاحظة : أن δ تمثل دالة دلتا كرونكر وأن m تمثل عددًا صحيحًا غير سالب. كما نقوم باختصار عوامل التحويل التفاضلي المباشر والعكسي لـ DT {·} و DT− 1 {·}، على التوالي، في هذه الورقة.

**3. التحليل عن طريق التقنية المقترحة**

من تعريف تحويل لابلاس :

(3)

وبأخد التحويلات التفاضلية المباشرة والعكسية بالنسبة لـ على كلا الجانبين في المعادلة (3)

ينتج أن:

(4)

أو بالتساوي:

(5)

الآن، يمكن تقييم التحويل التفاضلي للتكامل الداخلي بحكم الأخير، أو السابق، العملية المعروضة في الجدول (1). بعد ذلك، يتم عكس التعبير رسميًا بمساعدة (2). في وقت لاحق، بعض يتم إجراء العمليات الحسابية الأولية وعمليات إعادة الترتيب المتسلسلة لاستخراج مصطلح أسي. و الملاحظات المذكور أدناه قد يكون مفيدًا في هذه الخطوة. أخيرًا، تطبيق الحدود (صفر ولانهاية) على الناتج النهائي يعطي التعبير تحويل لابلاس لـ.

مبرهنة :

لتكن عددًا صحيحًا موجبًا محدودًا بحيث يكون فان :

(6)

لإثبات هذه المبرهنة نستخدم الاستقراء الرياضي.

الخطوة 1: بفرض

(7)

وبذلك

(8)

حيث=

وبذلك=

وبذلك ينتج أن:

(9)

m = 2 الخطوة 2: أفرض أن

(10)

=

بالتالي؛

أيضاً

(12)

الخطوة 3: افترض أن m = 1 إلى iيصح ذلك

و

في هذا السياق، علينا إثبات أن:

(13)

=

وبالتالي،

(14)

وبالتالي،

(14)

الآن، نظرًا لأن المناقشة في الخطوة 3 صالحة لـ i = 2 (كما هو موضح في الخطوتين 1 و 2)، فإننا نستنتج أنه بالنسبة إلى m = 3، فإن الافتراض تتحقق. بعد ذلك، من خلال رفع iتدريجيًا من 3 إلى m - 1 (واستدعاء الخطوة 3 في كل مرة)، يتم إثبات الافتراض بشكل متكرر لأي قيمة مرغوبة لـ m.

**4. التطبيق**

لقد اخترنا لهذا التطبيق من خلال الطريقة المقترحة لحسب تحويل لابلاس بعض الأمثلة :

**مثال 1.**

(15)

=

**مثال2.**

(16)

من الخصائص المدرجة في الجدول 1، وخاصة تلك الموجودة في السطر الأخير، يتم الحصول عليها؛

(17)

بتعويض بالمعادلة (17) في (16) ينتج ان :

(18)

تعريف قوى دالة دلتا كرونيكر

(19)

=

حيث يشير إلى المعامل الثابت المتعلق بقوة في كثير الحدود الناتج عن

فإن التجميع الأخير في المعادلة (19)يتلاشى وبالتالي

**مثال 3.**

حسب الافتراض ومعرفة أن :

نحصل على شكل مبسط:

(22)

يتم الحصول على تقدم هندسي لانهائي وجمع مكوناته الأولى n، عندما يميل nنحو

تم العثور على اللانهاية على النحو التالي:

(23)

**مثال4 .**

(24)

أولا : نحسب

(25)

بذلك يمكننا كتابة؛

(26)

=

بناءا على الافتراض؛

بإعادة كتابة أن:

(27)

=

=

لذلك؛

- (28)

arctan (29)

وبالتالي،

=arctan

**4. طريقة المتسلسلات**

نعبر عنالمتسلسلة بالصيغة :

ثم يتم الحصول على تحويل لابلاس لـ (f (t ببساطة عن طريق تقييم تحويل لابلاس لكل حد في السلسلة ثم تلخيص النتيجة كتالي :

**مثال 5**

1. من المعلوم أن المعادلة الأسية للعدد الطبيعيe معبر عنها بتعبير المتسلسلة كالأتي:

وذلك يعني بأن المعاملات تكون:

.

.

.

وبذلك؛

=

2. معادلة بيسل للدرجة n معرفة كالأتي:

لذلك عندما n=0 معادلة بيسل للدرجة 0 معرفة كالأتي:

وذلك يعني أن المعاملات تكون بالصورة:

وهكذا

.

.

.

وبذلك يكون

+…. L

+ =

=

=

وبما أن التوسع سلبى ينتج

وكذلك يمكن أن يكون

..

حيث؛

وبذلك؛

وبالمثل يمكن أن تنتج مباشرة كالأتي:

ولكن يمكن أن تكتب على صورة تكامل كالأتي:

بالتعويض بهذه المعادلة في (31) ينتج:

يؤدي تغيير ترتيب التكامل إلى؛

(32)

ولكن

لذلك أصبحت المعادلة (32) كالأتي؛

أفرض؛

أيضا

تصبح المعادلة؛مع

حيث جدور المعادلة هما

وبذلك

هنا ، في التكامل المحيط للتعبير (2.4) يقع جذر +z فقط خارج دائرة الوحدة، ومن ثم تطبيق نظرية تكامل كوشي لدينا

حيث . 3

er

باستخدام تعبير المتسلسلات

بذلك نجد

**الخلاصة**

روتين بسيط لحساب تحويلات لابلاس التحليلية من خلال طريقة التحويل التفاضلي الذي تم اقتراحه. تكمن النقطة البارزة في التقنية الجديدة في كونها خالية من التكامل، على عكس الطريقة المعتادة. يمكن اعتبار الطريقة المقترحة كأداة حسابية قوية تتطلب فقط تمايزًا بسيطة وعدد قليل من العمليات الأولية.

**المراجع**

[1] Ignor Podlubny and Kenneth V. Thimann (Eds ). Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Mathematics in science and engineering 198. Academic Press, 1st edition, 1999.

[2] C.W. Bert, Application of differential transform method to heat conduction in tapered fins, J. Heat Transfer 124 (2002) 208–209.

[3] H. Fatoorehchi, H. Abolghasemi, Differential transform method to investigate mass transfer phenomenon to a falling liquid film system, Aust. J. BasicAppl. Sci. 5 (2011) 337–345.

[4] F. perturbation Shakeri, M. Dehghan, Solution of delay differential equations via a homotopy method, Mathematical and Computer Modelling, 48 (2008) 486–498.

[5] Z. Smarda, J. Dibl´ık, Y. Khan, Extension of the differential transfo rmation method to nonlinear differential and integro-differential equations with proportional delays, Advances in Difference Equations 69 (2013), 1–13.

[6] A. Arikoglu, I. Ozkol, Solution of differential-difference equarions by using differential transform method, Appl. Math. Comput. 181 (2006), 153–162.

[7] F. Karakoc, H. Bereketoglu, Solutions of delay differential equations by using differential transform method, Int. J. Comput. Math. 86 (2009), 914–923.

[8]Z.M.Odibat,DifferentialtransformmethodforsolvingVolterraintegralequationwithseparablekernels,Math.Comput.Modelling48(2008)1144–1149

[9] A. Kurnaz, G. Oturnaç, M.E. Kiris, n-dimensional differential transformation method for solving PDEs, Int. J. Comput. Math. 82 (2005) 369–380.

[10] Gh. J. Mohammed, F. S. Fadhel, Extend differential transform methods for solving differential equations with multiple delay, Ibn Al-Haitham J. for Pure and Appl. Sci., Vol. 24(3),(2011) 1-5. 2

[11] K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, New York, 2009.

[12] M.A.B. Deakin, The development of the Laplace transform, 1737–1937 I. Euler to Spitzer, 1737–1880, Arch. Hist. Exact Sci. 25 (1981) 343–390.

[13] D. J. Evans, K. R. Raslan, The Adomian Decomposition Method for Solving Delay Differential Equation, Int. J. Comput. Math. 82 (2005), 49–54.

[14] E. Babolian, J. Biazar, A.R. Vahidi, A new computational method for Laplace transforms by decomposition method, Appl. Math. Comput. 150 (2004)841–846.

[15] S. Abbasbandy, Application of He’s homotopy perturbation method for Laplace transform, Chaos Solitons Fractals 30 (2006) 1206–1212.

[16] L. Blanco-Cocom, A. G. Estrella, E. Avila-Vales, Solving delay differential systems with history functions by the Adomian decomposition method, Appl. Math. Comput. 218 (2013), 5994–6011.

[17] J.K. Zhou, Differential Transformation and its Applications for Electrical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986 (in Chinese).

equations, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 4 (2010) 425–431